

8 квітня 2020 р.

Додаткові нотатки до лабораторної роботи № 18. Чисельне інтегрування. Формули прямокутників, трапецій, Сімпсона

Кілька коментарів до ЛР-18 (чисельне інтегрування).

1) Чисельне інтегрування застосовують у ситуаціях, коли первісна функція не виражається в елементарних функціях або описується занадто складним виразом.

Будь-який метод чисельного інтегрування полягає в тому, що складну підінтегральну функцію наближають більш простою, чия первісна легко визначається аналітично, а потім інтегрують саме її. Відповідні формули називають **квadrатурними**. Найбільш популярними з них є **формули Ньютона-Котеса**. В них підінтегральну функцію апроксимують інтерполяційним поліномом, чия первісна є також поліномом.

2) Найпростішими з квадратурних формул Ньютона-Котеса є формули прямокутників (коли апроксимуючий поліном має нульовий порядок, тобто є горизонтальною лінією), трапецій (апроксимація здійснюється поліномом 1-го степеня), Сімпсона (поліномом 2-го степеня).

В довідниках ви знайдете формули і більш високих степенів, але вони маловживані, бо для підвищення точності інтегрування, як правило, функцію не наближують одним поліномом високого степеня на всьому інтервалі інтегрування. Замість цього інтервал розбивають на окремі підінтервали, застосовують квадратурну формулу на кожному з них, а потім підсумовують результати.

3) Очевидно, що при зменшенні довжини підінтервалів, точність отриманого результату має підвищуватись. Якщо всі підінтервали мають однакову довжину, то похибка квадратурної формули залежить від числа підінтервалів n як $\frac{A}{n^p}$, де A – певний коефіцієнт, що залежить від конкретного виду підінтегральної функції, а p – число, що називається **порядком точності**. (Хто буде називати порядок точності «порядком збіжності», одразу отримає погану оцінку, бо ніякого ітераційного процесу, який збігається, тут немає).

Для методів прямокутників і трапецій $p = 2$, для Сімпсона $p = 4$.

4) Для дослідження квадратурних формул насамперед аналітично обчисліть точне значення вашого інтегралу $I_{\text{точн}}$ (ну, не зовсім точне – воно все рівно округлиться до машинного епсілон, але ж не вносить в це значення додаткових похибок). В реальному житті у вас такої можливості не буде, але при тестування вашої програми ця величина стане вам у пригоді.

5) Тепер обчисліть інтеграл наближено за допомогою квадратурної формули з n підінтервалами $I_{(n) \text{ наближ}}$. Різниця $e = I_{\text{точн}} - I_{(n) \text{ наближ}}$ є похибкою отриманого результату. Дослідіть залежність e від числа підінтервалів n , задаючи, скажімо, $n = 2, 4, 10, 20, 40, 100, \dots$. Впевніться, що при збільшенні n в K разів, похибка зменшується приблизно в K^p разів. Якщо це дійсно так, то ця перевірка свідчить про коректну роботу вашої програми.

Наприклад, якщо ви обрахували інтеграл за формулою Сімпсона при $n_1 = 4$ підінтервалах та при $n_2 = 40$ підінтервалах, тобто $K = n_2 / n_1 = 10$, то похибка e повинна зменшитись приблизно в $K^p = 10^4 = 10\,000$ разів.

Більш детальні інструкції ви знайдете безпосередньо у Практикумі.

Успіхів!