

26 квітня 2020 р.

Додаткові нотатки до лабораторної роботи № 15. Інтерполяція даних. Інтерполяційний поліном Лагранжа. Рівномірне (чебишовське) наближення функцій

Сьогодні настала черга кількох коментарів до ЛР-15 (Інтерполяція).

1) Загальна постановка задачі інтерполяції така: є точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ... (їх називають вузлами інтерполяції), і їх потрібно з'єднати неперервною лінією $\Phi(x)$ (її називають інтерполянтою).

Тобто, треба знайти таку $\Phi(x)$, щоб

$$\Phi(x_1)=y_1, \Phi(x_2)=y_2, \Phi(x_3)=y_3, \dots \quad (*)$$

Як ви розумієте, таких ліній є безліч, і щоб вибрати з них одну, треба якось конкретизувати, якого типу функцію $\Phi(x)$ ви хочете мати.

2) З популярних способів інтерполяції можна зазначити кусково-лінійну – точки з'єднуються прямими відрізками, з яких утворюється ламана. Вочевидь, така ламана єдина, бо визначається набором точок однозначно. Недолік такого способу – це розриви похідної в кожному вузлі інтерполяції

3) Іншим популярним способом є поліноміальна інтерполяція. Через n точок-вузлів проводимо єдиний поліном з n коефіцієнтами. (Це буде поліном степеня $n-1$.) В принципі, щоб знайти ці n коефіцієнтів, треба розв'язати систему рівнянь (*), де ці коефіцієнти будуть шуканими невідомими.

Лагранж запропонував записувати такий поліном в особливій формі $L(x)$ (див. магічну формулу (3) на стор. 113 Практикума), яка дозволяє уникнути розв'язання системи рівнянь. Це не канонічна форма, але якщо вже комусь так кортить, можна розкрити дужки. Головне пам'ятати - **це єдиний поліном степеня $n-1$, який можна провести через n точок.**

4) Історично першим практичним застосуванням інтерполяції було користування таблицями функцій. Колись в докомп'ютерні (і навіть в докалькуляторні) часи друкувалися цілі книжки з таблицями. Наприклад:

x	$\sqrt{x}$
	...
1.0	1.00000
1.1	1.04881
1.2	1.09545
1.3	1.14018
1.4	1.18322
1.5	1.22474
	...

(За старих часів популярними були таблиці В. М. Брадїса, складені ним іще в 1921 р. як додаток до шкільних підручників з математики. Не знаю, чи застали ви ще їх.)

Щоб знайти значення, скажімо, $\sqrt{1.33}$, треба кілька сусідніх точок вибрати за вузли інтерполяції (скажімо, $x=1.2; 1.3; 1.4$), побудувати на них поліном $L(x)$ (в даному прикладі це буде поліном 2-го степеня) і обчислити значення $L(1.33)$.

Звичайно, розрахована інтерполянта буде відрізнятись від функції, яку вона наближає, але, зазвичай, чим вищий степінь полінома, тим меншою похибка буде в наближенні $L(x)$.

5) Саме цю ситуацію вам пропонується змоделювати у вашій ЛР. Ви берете вашу функцію $f(x)$, задаєте інтервал наближення $[a; b]$ та ставите на цьому інтервалі n точок з рівним кроком – дві на кінцях, а решта розбивають інтервал на $n-1$ однакових ділянок:

$$x[i] = a + (b-a) * (i-1) / (n-1) ;$$

$$y[i] = f(x[i]) ;$$

(в циклі $i = 1, 2, \dots, n$)

Після чого згадуєте ЛР-3 і знову будете графік $f(x)$, відмічаєте на ньому якимись мітками (кружечками, хрестиками, сердечками – на власний розсуд) вузли (x_i, y_i) , і поверх всього малюєте графік $L(x)$, розрахований за магічною формулою (3) на стор. 113 Практикума. Звичайно, $L(x)$ має пройти через ці **мітки**, інакше ви щось зробили не так.

Ви побачите, як в межах інтервалу інтерполяції $[a, b]$ криві $L(x)$ та $f(x)$ йдуть близьенько одна до одної, а поза межами цього інтервалу $L(x)$ швидко віддалятиметься від $f(x)$.

6) Цікаво дослідити, якою буде похибка такого наближення (кому не цікаво – можете далі не читати, але й оцінка буде відповідною).

Іншими словами, наскільки в межах $x \in [a, b]$ крива $L(x)$ ухиляється від $f(x)$? Ясно, що у вузлах інтерполяції x_i ці криві збігаються, а їхні значення співпадають і дорівнюють y_i . Але наскільки $L(x)$ та $f(x)$ розходяться між вузлами інтерполяції? Зокрема, наскільки значним буде **максимальне відхилення** $L(x)$ від $f(x)$, яке називають **дефектом наближення** $D = \max \{ |f(x) - L(x)| \}$?

Найпростіший спосіб визначити D – побудувати графік $f(x) - L(x)$ (як на рис. 15.1 праворуч на стор. 114 Практикуму). Для цього потрібно розрахувати значення $f(x) - L(x)$ при багатьох значеннях x (не забуваймо, $x \in [a, b]$) і з'єднати отримані точки плавною кривою. (Будувати слід на **окремому малюнку**, тому що потрібно збільшити масштаб по осі y , інакше нічого не буде видно.) Ми отримаємо хвилясту криву, яка в точках x_i обов'язково перетинатиме горизонтальну вісь. Чим густіше точки, тим точніше буде результат, але для практичних потреб 10...20 точок на півхвилю буде більш ніж достатньо.

Величину дефекту D можна легко зчитати з графіка $f(x) - L(x)$: це амплітуда максимальної півхвилі.

АБО

Розрахувати всі ці значення $f(x) - L(x)$, але нічого не будувати, а просто занести їх у таблицю і подивитися, яке значення буде максимальним за модулем. Адже нам потрібно знати не точне положення максимуму x , а лише значення $D = |f(x) - L(x)|$ при цьому x , і якщо ми обчислимо D не точно в цій точці, а в сусідній, різниця для наших потреб буде не настільки суттєвою.

Дослідіть, як дефект буде зменшуватись при збільшенні $n = 3, 4, \dots$ (до $n = 7$ буде достатньо).

7) І наостанок. Таблицями зараз вже ніхто не користується, але інтерполяційний поліном можна використовувати для наближення складних функцій з метою спрощення обчислень. Виникає питання, а чи можна зменшити дефект наближення, не збільшуючи степінь поліному $L(x)$, але відступивши від вимоги, щоб вузли розташовувалися з рівним кроком, як це практикують при друкуванні таблиць?

Відповідь на це питання – так, це можливо. На жаль, для функції довільного вигляду $f(x)$ розв'язок задачі вельми громіздкий, але якщо $L(x)$ - поліном $n-1$ -го степеня, а $f(x)$ - поліном n -го степеня, то рішення існує. Точки x_i потрібно вибрати як корні поліномів Чебишова:

$$x[i] = (a+b)/2 + (b-a)/2 * \cos((n-i+0.5) * \pi/n);$$

$$y[i] = f(x[i]);$$

(в циклі $i = 1, 2, \dots, n$)

Якщо ж функція $f(x)$ є функцією довільного вигляду (як у вашому випадку) то ця рекомендація носитиме лише наближений характер.

Зверніть увагу, що жодний з Чебишовських вузлів не співпадає з межами інтервалу $[a; b]$.

Тепер повторіть те ж саме дослідження, збільшуючи $n = 3, 4, 5, \dots$, але вже з Чебишовськими вузлами, і впевніться, що при такому ж степені полінома дефект стане приблизно вдвічі меншим порівняно з рівнокроковими вузлами.

Все. Нічого складного.

Творчої вам наснаги!