

4 травня 2020 р.

Додаткові нотатки до лабораторної роботи № 16. Кусково-поліноміальна інтерполяція. Кубічні сплайни

1) Кубічні сплайни – це порівняно недавній математичний винахід, але вони моделюють дуже старий механічний пристрій. Креслярі здавна користувалися механічними сплайнами, що являють собою гнучку рейку (англ. *spline*) з якогось пружного матеріалу, на кшталт довгої металевої лінійки. Аркуш з кресленням закріплюють на креслярській дошці і на ньому позначають точки, які потрібно з'єднати плавною кривою. В ці точки встромляють спеціальні кнопки, головки яких містять проріз для рейки і можуть вільно прокручуватись навколо вістря (рис. 1).

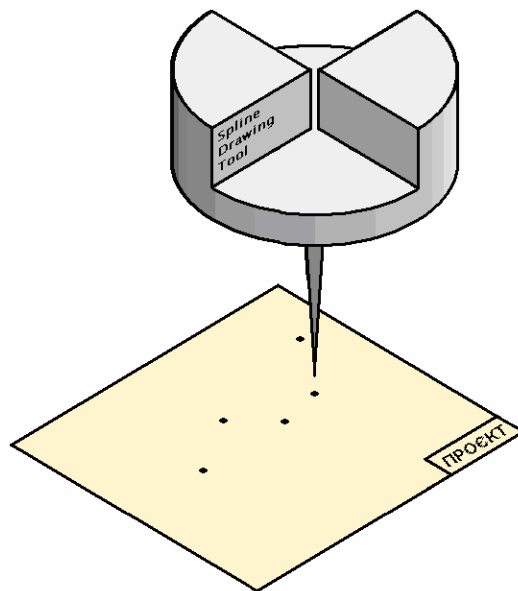


Рис. 1

Потім в ці прорізи заправляють поставлену на ребро рейку, яка, вигинаючись, плавно з'єднує задані точки, набуваючи форми, що мінімізує потенційну енергію її пружної деформації (рис. 2).

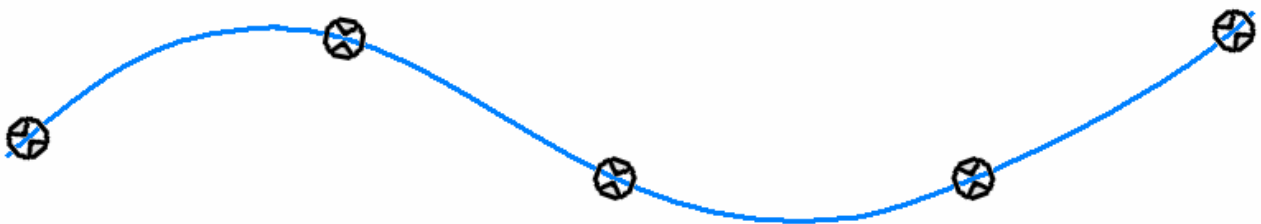


Рис. 2

В теорії пружності доводиться, що у рейки, вигнутої у формі $s(x)$, ця енергія пропорційна інтегралу від квадрату другої похідної $s(x)$. Отже, якщо задано $n+1$ вузлів $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, то сплайн $s(x)$ – це функція,

для якої $s(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), а інтеграл $\int_{x_0}^{x_n} [s''(x)]^2 dx$ має мінімально

можливе значення.

Оскільки механічний сплайн не руйнується, то слід вважати, що s та s' неперервні на $[x_0, x_n]$. Елементарна теорія балок показує, що $s(x)$ є кубічним поліномом між кожною сусідньою парою вузлів, і що сусідні поліноми з'єднуються неперервно, так само як їх перші і другі похідні.

2) Розрахунок сплайна зводиться до обчислення масиву значень його другої похідної в усіх $n+1$ вузлах $s''(x_i) = u_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Вони визначаються з умови, щоб перша похідна в $n-1$ внутрішніх вузлах ($i = 1, 2, \dots, n-1$) залишалась неперервною. Відсутні 2 умови на u_i можна накласти довільно, зазвичай вимагають $u_0 = u_n = 0$. Тоді u_i розраховуються за схемою «прогонки» за формулами (12), (13) на стор. 132 Практикуму.

Після того, як масив u_i обчислено, значення сплайну на кожному інтервалі розраховується за формулою (6.1) на стор. 129 Практикуму. Вона відрізняється від простої кусково-лінійної інтерполяції наявністю додаткового кубічного члену, який дорівнює нулю у вузлах і забезпечує сплайну додаткову гладкість.

3) Поширеною помилкою при скаладанні програм для сплайн-інтерполяції виявилась ось така, притаманна «економним» програмістам.

Про що мова. У випадку, коли масиви містять по n чисел та їх нумерують від 1 до n , деякі особливо економні програмісти, економлячи **одну (!) комірку пам'яті**, декларують масиви, індексуючи їх від 0 до $n-1$. А потім плутаються з тим, що «**n** у програмі – це $n-1$ з книги», створивши джерело важко відстежуваних помилок. І все це замість того, щоб задекларувати масив від 0 до n , а потім забути про існування елементу **x[0]** і просто його не використовувати.

В даному випадку масиви, що використовуються при описі сплайн-інтерполяції в Практикумі, **вже** нумеровані від 0 до n , але дехто за інерцією продовжує робити в коді цей непотрібний зсув на -1 .

Не ускладнюйте собі життя.