

17 травня 2020 р.

Додаткові нотатки до лабораторної роботи № 20. Звичайні диференціальні рівняння. Задача Коші

1) Для розв'язання задачі Коші прекрасним інструментом служить **MS Excel** або інший табличний процесор.

Чисельний розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$y'(t) = f(t, y),$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = y_0$$

(задача Коші) відшукується в табличній формі (див. стор. 164 практикуму):

t	y	$y'(t) = f(t, y)$
t_0	y_0	$y'_0 = f(t_0, y_0)$
t_1	y_1	$y'_1 = f(t_1, y_1)$
...	...	...
t_m	y_m	$y'_m = f(t_m, y_m)$
t_{m+1}	y_{m+1}	$y'_{m+1} = f(t_{m+1}, y_{m+1})$
...	...	...

Нульовий рядок таблиці – це початкова умова. В однокрокових методах Рунге-Кутти для розрахунку кожного наступного рядка використовуються дані одного попереднього рядка.

2) Почнемо з найпростішого метода Рунге-Кутти 1-го порядку (інакше званого методом Ейлера). Перехід від поточного рядка (t, y) до наступного $(t_{\text{NEW}}, y_{\text{NEW}})$ здійснюється за розрахунковою схемою (див. формулу (3) на стор. 165 Практикума):

$$k = f(t, y);$$

$$t_{\text{NEW}} = t + h;$$

$$y_{\text{NEW}} = y(t_{\text{NEW}}) = y + kh.$$

Для прикладу розглянемо задачу Коші з $f(t, y) = y - t + 1$ та початковою умовою $t_0 = 0$; $y_0 = -0.2$.

Початкові рядки ексельної таблиці матимуть вигляд:

	D	E	F	G	H	I	J	K
1								
2		h						
3		0.1						
4								
5								
6		t	y	y' = k = f(t,y)				
7		0	-0.2	0.8				
8		0.1	-0.12					
9								
10								
11								
12								
13								

Рис. 1

Десь окремо ми призначаємо значення кроку h по незалежному аргументу t (тут ми поклали $h=0.1$ і помістили його в клітинку **E3**), а у верхній рядок таблиці прописуємо початкову умову (ці клітинки виділені жовтим фоном).

Далі у відповідні три клітинки прописуємо формули розрахункової схеми. Зважаючи на те, що для подальших розрахунків ми будемо їх копіювати, «розтягуючи» таблицю вниз, посилання на крок h необхідно зазначати в абсолютних координатах, яким передує знак долара (**\$E\$3**).

На цьому процедура власне програмування завершується, і далі треба лише розтягнути формули: спочатку **G7** на **G8**, а потім весь рядок **E8-G8** – вниз, доки t не досягне бажаної кінцевої величини $t_{\max}$.

Результат представлено на рис. 2. Ми поклали $t_{\max} = 3$. Тут же для порівняння додано два стовпчики. Перший з них y_a містить аналітичний розв'язок $y(t) = t + C \exp(t)$. Константа C визначається підстановкою в аналітичний розв'язок початкової умови:

$$y_0 = t_0 + C \exp(t_0),$$

звідки $C = -0.2$. Другий додатковий стовпчик $y - y_a$ містить різницю між чисельним і аналітичним розв'язком, яка становить глобальну похибку чисельного розв'язку.

	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1									
2		h	чисельний розв'язок		c	аналітичний розв'язок		похибка	
3		0.1			-0.2				
4									
5									
6		t	y	y' = k = f(t,y)		y_a		y - y_a	
7		0	-0.2	0.8		-0.2		0	
8		0.1	-0.12	0.78		-0.12		0.001	
9		0.2	-0.042	0.758		-0.044		0.002	
10		0.3	0.034	0.734		0.030		0.004	
11		0.4	0.107	0.707		0.102		0.006	
12		0.5	0.178	0.678		0.170		0.008	
13		0.6	0.246	0.646		0.236		0.010	
14		0.7	0.310	0.610		0.297		0.013	
15		0.8	0.371	0.571		0.355		0.016	
16		0.9	0.428	0.528		0.408		0.020	
17		1	0.481	0.481		0.456		0.025	
18		1.1	0.529	0.429		0.499		0.030	
19		1.2	0.572	0.372		0.536		0.036	
20		1.3	0.610	0.310		0.566		0.043	
21		1.4	0.641	0.241		0.589		0.052	
22		1.5	0.665	0.165		0.604		0.061	
23		1.6	0.681	0.081		0.609		0.072	
24		1.7	0.689	-0.011		0.605		0.084	
25		1.8	0.688	-0.112		0.590		0.098	
26		1.9	0.677	-0.223		0.563		0.114	
27		2	0.655	-0.345		0.522		0.132	
28		2.1	0.620	-0.480		0.467		0.153	
29		2.2	0.572	-0.628		0.395		0.177	
30		2.3	0.509	-0.791		0.305		0.204	
31		2.4	0.430	-0.970		0.195		0.235	
32		2.5	0.333	-1.167		0.064		0.270	
33		2.6	0.216	-1.384		-0.093		0.309	
34		2.7	0.078	-1.622		-0.276		0.354	
35		2.8	-0.084	-1.884		-0.489		0.405	
36		2.9	-0.273	-2.173		-0.735		0.462	
37		3	-0.490	-2.490		-1.017		0.527	

Рис. 2

На рис. 3 показані графіки чисельного (методом Ейлера) та аналітичного розв'язків, побудовані на даних зі стовпчиків y та y_a .

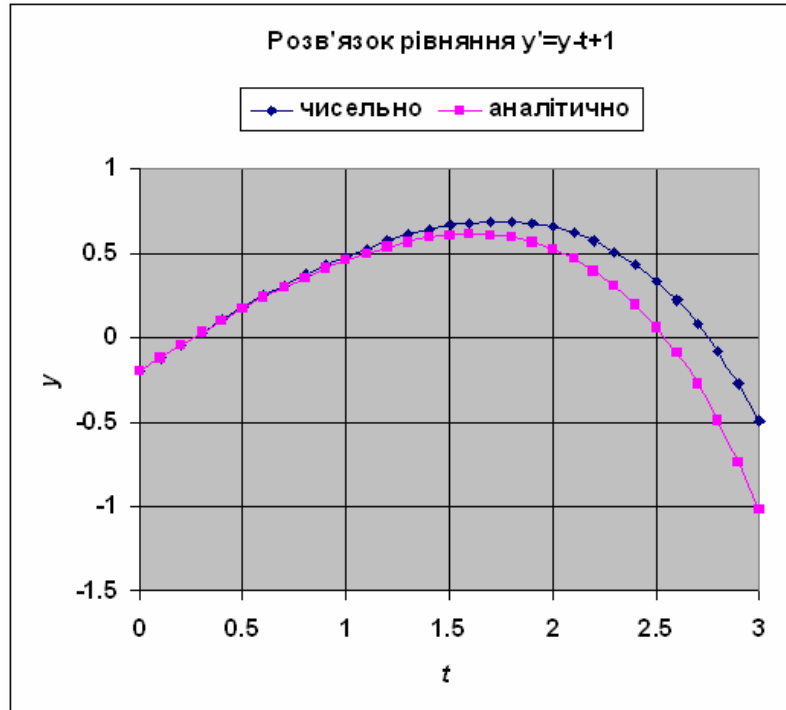


Рис. 3

3) Розглянемо тепер обчислювальну схему (точніше, сімейство схем) Рунге-Кутти 2-го порядку. Вона передбачає два обчислення функції $f(t, y)$ на кроці інтегрування: перше – в лівій точці (t, y) та друге – в проміжній (*intermediary*) точці (t_i, y_i) (див. формулу (5) на стор. 166 Практикума):

$$k_1 = f(t, y);$$

$$t_i = t + \frac{h}{2\omega};$$

$$y_i = y + \frac{hk_1}{2\omega};$$

$$k_2 = f(t_i, y_i);$$

$$t_{\text{NEW}} = t + h;$$

$$y_{\text{NEW}} = y(t_{\text{NEW}}) = y + [(1 - \omega)k_1 + \omega k_2]h,$$

де h – крок інтегрування по t , а $\omega \neq 0$ – вільний параметр. Найпоширенішими є обчислювальні схеми з $\omega = 1$ (модифікований метод Ейлера), $\omega = 1/2$ (метод Х'юна), та $\omega = 2/3$ (метод Ральстона).

Таким чином, в нашу ексельну таблицю треба буде додати три стовпчики для розрахунків: t_i , y_i , k_2 (рис. 4)

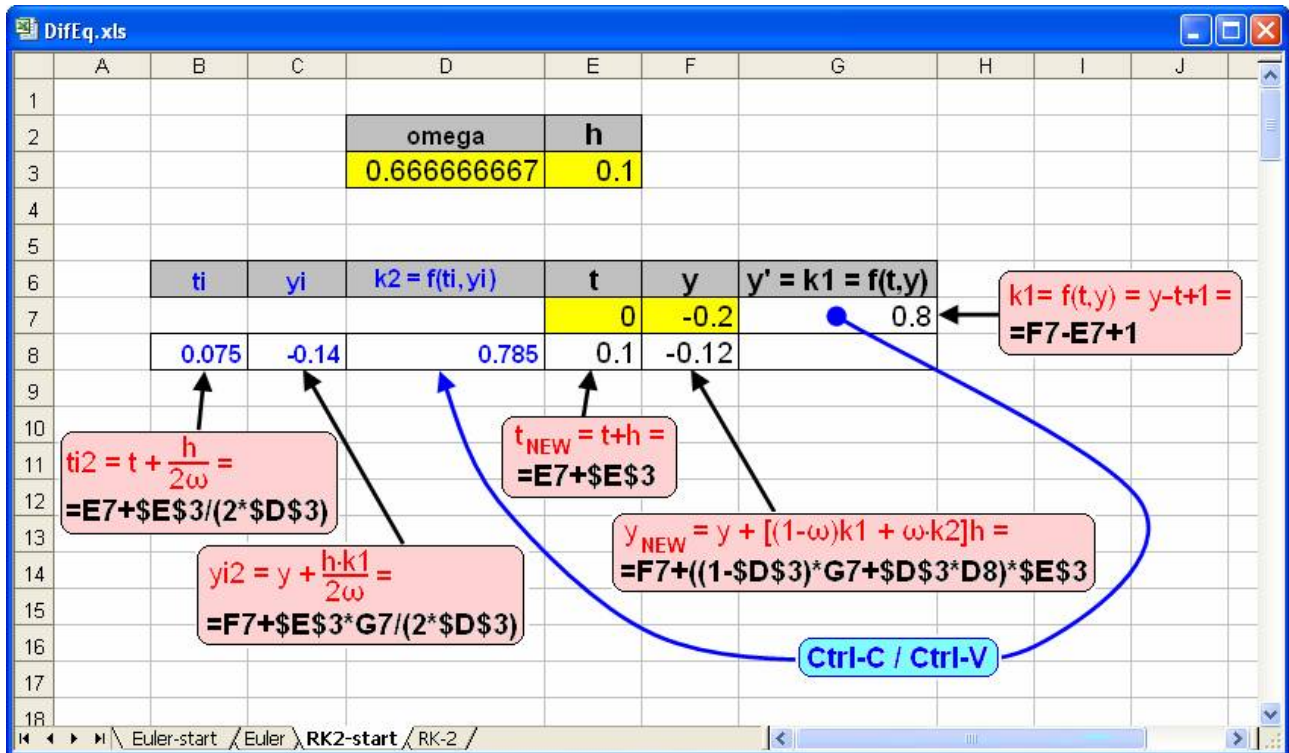


Рис. 4

Так само десь окремо ми призначаємо значення кроку h та параметру ω , а у верхній рядок таблиці прописуємо початкову умову (ці клітинки виділені жовтим фоном).

Далі, у відповідні шість клітинок прописуємо формули розрахункової схеми. Зверніть увагу, що програмувати функцію $f(t, y)$ для обчислення k_1 та k_2 слід лише один раз: вираз з клітинки k_1 (G7) копіюється в k_2 (D8), оскільки в обох випадках аргументи функції розташовані в аналогічних по відношенню до результату клітинках.

Тепер розтягуємо формули: спочатку G7 на G8, а потім весь рядок B8-G8 – вниз, доки t не досягне бажаної величини $t_{\max} = 3$. Результат представлено на рис.5.

DiffEq.xls							
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2				omega	h		
3				0.666666667	0.1		
4							
5							
6		ti	yi	k2 = f(ti, yi)	t	y	y' = k1 = f(t, y)
7					0	-0.2	0.8
8		0.075	-0.14	0.785	0.1	-0.121	0.779
9		0.175	-0.063	0.762	0.2	-0.044	0.756
10		0.275	0.0125	0.737	0.3	0.030	0.730
11		0.375	0.0849	0.710	0.4	0.102	0.702
12		0.475	0.1545	0.679	0.5	0.171	0.671
13		0.575	0.2208	0.646	0.6	0.236	0.636
14		0.675	0.2836	0.609	0.7	0.298	0.598
15		0.775	0.3425	0.568	0.8	0.355	0.555
16		0.875	0.3971	0.522	0.9	0.409	0.509
17		0.975	0.4469	0.472	1	0.457	0.457
18		1.075	0.4915	0.416	1.1	0.500	0.400
19		1.175	0.5302	0.355	1.2	0.537	0.337
20		1.275	0.5625	0.287	1.3	0.568	0.268
21		1.375	0.5877	0.213	1.4	0.591	0.191
22		1.475	0.605	0.130	1.5	0.606	0.106
23		1.575	0.6137	0.039	1.6	0.612	0.012
24		1.675	0.6127	-0.062	1.7	0.608	-0.092
25		1.775	0.6012	-0.174	1.8	0.593	-0.207
26		1.875	0.5779	-0.297	1.9	0.567	-0.333
27		1.975	0.5418	-0.433	2	0.527	-0.473
28		2.075	0.4913	-0.584	2.1	0.472	-0.628
29		2.175	0.425	-0.750	2.2	0.401	-0.799
30		2.275	0.3412	-0.934	2.3	0.312	-0.988
31		2.375	0.2382	-1.137	2.4	0.204	-1.196
32		2.475	0.1138	-1.361	2.5	0.073	-1.427
33		2.575	-0.034	-1.609	2.6	-0.082	-1.682
34		2.675	-0.208	-1.883	2.7	-0.264	-1.964
35		2.775	-0.411	-2.186	2.8	-0.475	-2.275
36		2.875	-0.645	-2.520	2.9	-0.719	-2.619
37		2.975	-0.915	-2.890	3	-0.999	-2.999
38							

Рис. 5

Глобальна похибку чисельного розв'язку, тобто різницю між чисельним і аналітичним розв'язками, розраховується так само.

Зверніть увагу, наскільки розв'язок першого порядку $y = -0.490$ при $t = t_{\max}$ далі від точного $y_a = -1.017$, ніж розв'язок другого порядку $y = -0.999$. Саме тому метод Ейлера на практиці майже не застосовують.

4) Розрахунок за схемою Рунге-Кутти 4-го порядку проводиться аналогічно, але він потребує чотири обчислення функції $f(t, y)$ на кроці інтегрування: перше – в лівій точці (t, y) , а 2-е, 3-є та 4-е – в певних проміжних точках (t_{i2}, y_{i2}) , (t_{i3}, y_{i3}) та (t_{i4}, y_{i4}) (див. формулу (6) на стор. 166 Практикума).

Таким чином, в нашу ексельну таблицю треба буде додати порівняно з методом Ейлера не три, а дев'ять стовпчиків для розрахунків. Ви можете скласти таку таблицю самостійно.

5) Тепер ви можете дослідити, як впливає величина кроку інтегрування h на точність розв'язку задачі. Зокрема, впевніться, що при зміні h в K разів глобальна похибка при тому ж значенні t змінюється приблизно в K^p разів, де p – порядок метода. Якщо це дійсно так, то така перевірка свідчить про коректність ваших розрахунків.