

22 травня 2020 р.

Додаткові нотатки до лабораторної роботи № 21. Системи звичайних диференціальних рівнянь

1) Сьогодні за допомогою **MS Excel** ми моделюємо рух космічного супутника. Рівняння його руху в полі тяжіння планети мають вигляд (див. формулу (5) на стор. 174 Практикуму):

$$\begin{cases} y_1' = y_3; \\ y_2' = y_4; \\ y_3' = -y_1 A; \\ y_4' = -y_2 A, \end{cases}$$

$$\text{де } A = \frac{GM}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}.$$

Тут (y_1, y_2) – компоненти радіус-вектора супутника (в площині орбіти), тобто його координати, а (y_3, y_4) – компоненти вектора швидкості.

Вважаємо, що на початку руху вектор швидкості супутника перпендикулярний його радіус-вектору. Це означатиме, що його рух починатиметься від перицентру або апоцентру орбіти, тобто точки, найближчої до центра тяжіння, або найвіддаленішої від нього. Тоді початкові умови матимуть вигляд:

$$\begin{cases} y_1(t_0) = r_0 \\ y_2(t_0) = 0 \\ y_3(t_0) = 0 \\ y_4(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Будемо розв'язувати диференціальні рівняння методом Рунге-Кутти 2-го порядку за схемою:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t, \mathbf{y});$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2\omega}, \mathbf{y} + \frac{h\mathbf{k}_1}{2\omega}\right);$$

$$\mathbf{y}(t+h) = \mathbf{y}(t) + (1-\omega)h\mathbf{k}_1 + \omega h\mathbf{k}_2.$$

Для конкретності виберемо параметр $\omega=1$ та зауважимо, що права частина рівнянь (5) не залежить від часу. (Такі системи називають консервативними, в них виконується закон збереження енергії). Тоді, позначаючи через y_i

проміжну (*intermediary*) точку, наша розрахункова схема для переходу від поточного рядка $(t, \mathbf{y})$ до наступного $(t_{\text{NEW}}, \mathbf{y}_{\text{NEW}})$ прийме вид:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y});$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y} + \frac{h\mathbf{k}_1}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i);$$

$$t_{\text{NEW}} = t + h;$$

$$\mathbf{y}_{\text{NEW}} = \mathbf{y}(t_{\text{NEW}}) = \mathbf{y} + h\mathbf{k}_2.$$

За основу приймемо нашу ексельну таблицю з ЛР20, але тепер кожний стовпчик у та f «розщепиться» на 4 компоненти.

2) Зверніть увагу, що для всіх фізичних величини в таблиці на стор. 181 Практикуму використовуються одиниці – кілометри та секунди, тож і тут будемо в розрахунках використовувати саме їх.

Приймемо, що наш супутник починає свій рух на висоті 20 000 км над поверхнею Землі, тобто на відстані 26 371 км від її центру (приблизно на таких орбітах обертаються супутники навігаційних систем GPS). На цій висоті його кругова швидкість становитиме близько 3.89 км/с, а період обертання по круговій орбіті – близько 42 300 с = 11 год. 45 хв. Приймемо крок по часу $h = 900$ с = 15 хв. Тоді на повний оберт прийдеться 47 проміжних точок, що для початкового розрахунку вбачається розумним вибором.

3) Початкові рядки ексельної таблиці матимуть вигляд (збільшіть масштаб перегляду, якщо погано видно):

Satellite.xls

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			

GM

h

398600

900

k2=f(yi)

yi1

yi2

yi3

yi4

A

yi1'

yi2'

yi3'

yi4'

t

y1

y2

y3

y4

A

y1'

y2'

y3'

y4'

0

26371

0

0

3.89

2.17E-08

0

3.89

-0.000573

0

26371

1751

-0.2579

3.8900

2.159E-08

-0.2579

3.8900

-5.694E-04

-3.780E-05

900

26139

3501

-0.5125

3.8560

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑

↑</

Рис. 1

Спочаткудесь окремо ми призначаємо значення гравітаційного параметру Землі $GM = 398\,600$ та кроку h по незалежному аргументу t (нагадаю, ми поклали $h = 900$). Всі посилання в ексельній таблиці на GM та h необхідно буде зазначати в абсолютних координатах, яким передуює знак долара (\$J\$3 та \$K\$3).

У верхній рядок таблиці прописуємо початкові умови (ці клітинки виділені жовтим фоном). Поруч розраховуємо параметр A (не забуваємо про абсолютну адресацію для GM) і чотири компоненти вектора $\mathbf{k}_1$.

Тепер переходимо до другого рядка. На початку нам потрібні 4 компоненти проміжної точки y_i . Для першої компоненти (B8) треба вручну вписати відповідну формулу (не забуваємо про абсолютну адресацію для h), а для решти трьох – просто розтягнути її на сусідні клітинки, бо розраховуються вони аналогічно.

Наступні п'ять клітинок (F8–J8) – параметр A в проміжній точці та вектор $\mathbf{k}_2$ – ми копіюємо з клітинок (P7–T7), де подібним чином розраховується $\mathbf{k}_1$, оскільки в обох випадках аргументи розташовані в аналогічних по відношенню до результату клітинках.

І, насамкінець, збільшуємо поточний час на величину кроку $t_{NEW} = t + h$ та обраховуємо нові значення для y_{NEW} . Причому, так само, як для проміжної точки y_i , формулу для першої компоненти (L8) потрібно вписати вручну, а для решти трьох – розтягнути її на сусідні клітинки.

На цьому процедура власне програмування завершується, і далі треба лише розтягнути формули: спочатку (P7–T7) на (P8–T8), а потім весь рядок B8–T8 – вниз, доки t не досягне бажаної кінцевої величини.

Результат розрахунків представлено на рис. 2.

Satellite.xls																			
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																			
2									GM	h									
3									398600	900									
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15																			
16																			
17																			
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			
23																			
24																			
25																			
26																			
27																			
28																			
29																			
30																			
31																			
32																			
33																			
34																			
35																			
36																			
37																			
38																			
39																			
40																			
41																			
42																			
43																			
44																			
45																			
46																			
47																			
48																			
49																			
50																			
51																			
52																			
53																			
54																			
55																			
56																			

Рис. 2

Зверніть увагу: момент, коли координата y_2 (тобто друга компонента радіус-вектора) змінює знак з «-» на «+», означає замикання орбітальної траєкторії.

На рис. 3 показана розрахована орбіта, побудована на даних зі стовпчиків y_1 (x-компонента радіус вектора) та y_2 (y-компонента). Вона являє собою замкнене коло.

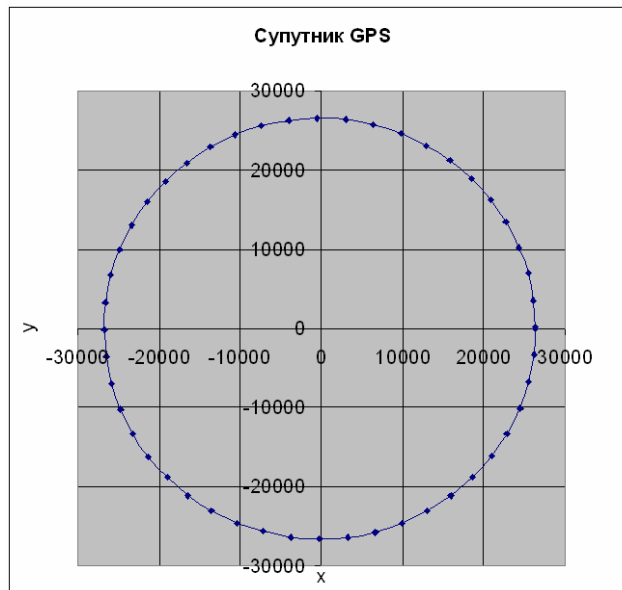


Рис. 3

4) Подивимося, як буде зростати похибка розрахунків, якщо крок інтегрування вибрати занадто великим. На рис. 4 показані результати розрахунків при $h = 2700$ с = 45 хв.

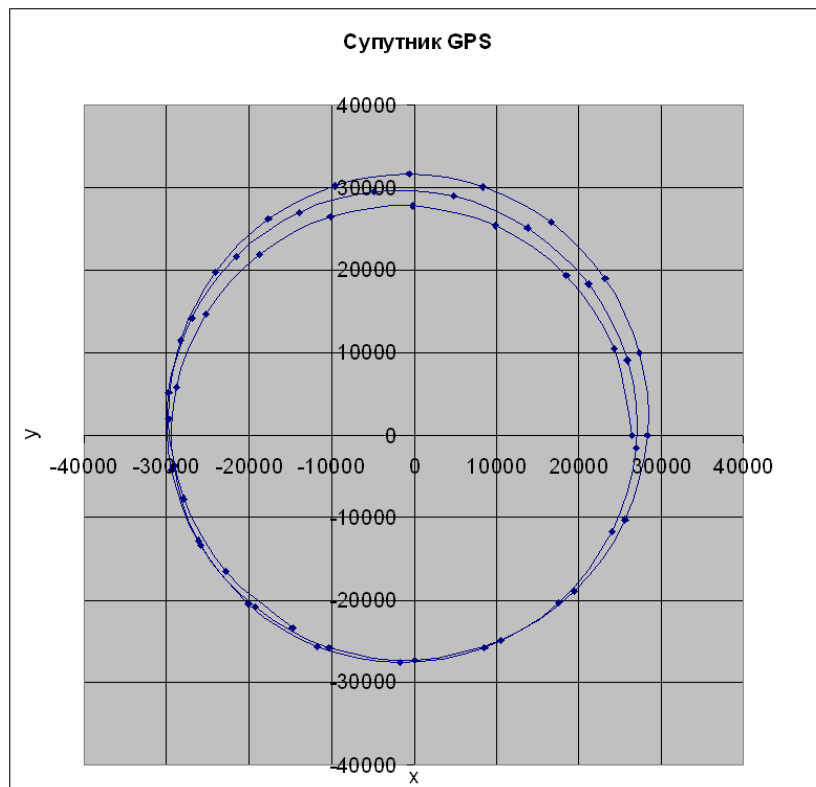


Рис. 4

Видно, що за рахунок накопичання помилок розрахована орбіта перестає бути замкненою і спотворюється у спіралеподібну криву.

5) Можна дослідити, як зміниться форма траєкторії, якщо змнити початкову швидкість. На рис. 5 показана орбіта при початковій швидкості в 1.2 від кругової, тобто 4.668 км/с. Крок по часу $h = 900 \text{ с} = 15 \text{ хв}$.

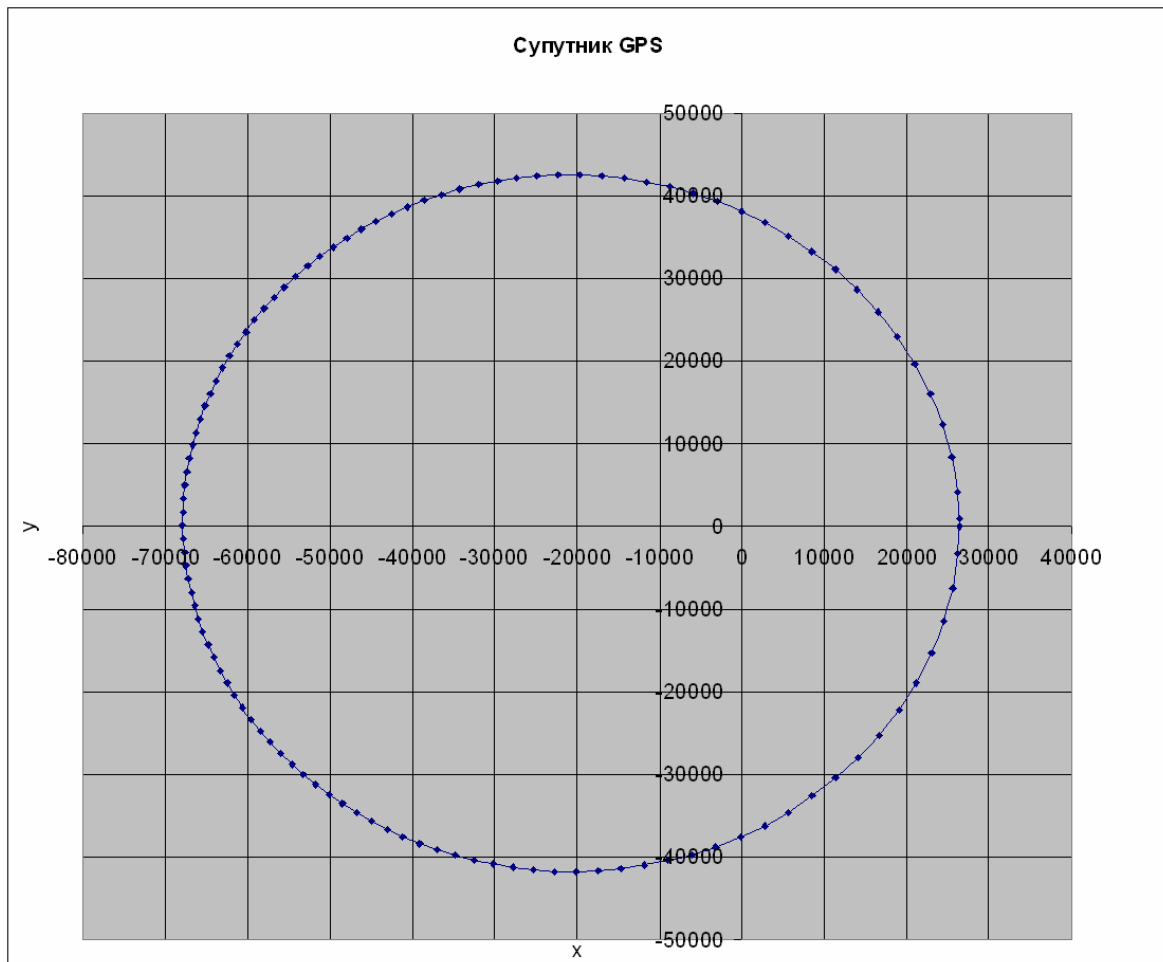


Рис. 5

Відрізок між двома сусідніми розрахованими точками – це дистанція, яку супутник проходить за час кроку h , тобто, в даному випадку – за 15 хв. Вона, звичайно, пропорційна швидкості супутника. Таким чином, наш рисунок наочно показує, що швидкість супутника поблизу його перигея максимальна, а поблизу апогея – мінімальна.

З самої ексельної таблиці можна побачити, що висота апогею (максимальне по абсолютній величині від'ємне значення в стовпчику y1) становить 67 855 км, при цьому швидкість (стовпчик y4) становить 1.807 км/с, і супутник проходить апогей приблизно через 51 300 с = 14 год. 15 хв. після початку руху, що становить половину періода обертання, який дорівнює 101 700 с = 28 год. 15 хв.

Навпаки, при зменшенні швидкості до 0.8 кругової, тобто до 3.112 км/с, точка запуску стає апогеєм, а протилежна точка – перигеєм. Оскільки в перигеї швидкість збільшиться, то крок інтегрування h потрібно вибрати меншим, інакше похибки в розрахованні траєкторії перетворять її на незамкнену спіраль.

На рис. 5 показана орбіта супутника при тій самій точці запуску, але початковій швидкості 3.112 км/с. Крок по часу $h = 300 \text{ с} = 5 \text{ хв}$.

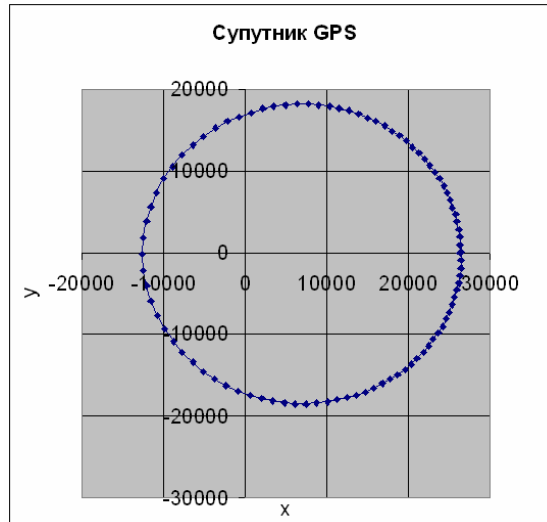


Рис. 5

Так само, з ексельної таблиці визначаємо, що висота перигею становить 12 560 км, швидкість в перигеї дорівнює 6.561 км/с, і супутник проходить перигей приблизно через 13 500 с = 3 год. 45 хв після початку руху, що становить половину періода обертання, який дорівнює 27 300 с = 7 год. 35 хв.

Захоплюючого моделювання!